Банк заданий магистратуры на направление 13.04.01 Теплоэнергетика и теплотехника заочной формы обучения.

Базовая часть

Форма обучения Очная

Направление подготовки 13.04.01 Теплоэнергетика и теплотехника.

Задание 1

Задание1.1.Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

Ответ: 9

Решение задания 1.1

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 5 * (-3 - 0) + 2 * (-9 + 24) + (0 - 6) = -15 + 30 - 6 = 9$$

Задание 1.2. Найти произведение матриц: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 18 & -8 \end{pmatrix}$

Решениезадания 1.2

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} -2+6 & 4+2 \\ 6+12 & -12+4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 18 & -8 \end{vmatrix}$$

Задание 1.3 Найти $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}$.

Ответ: $\dfrac{1}{2}$**. Решение задания 1.3**

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1+x^2-1}{x^2 \cdot (\sqrt{1+x^2}+1)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1} = \frac{1}{2}$$

Задание 1.4 Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x}{1-\sqrt{1+\mathrm{tg}x}}$.

Ответ: -2.

Решение задания 1.4

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tgx}}{1-\sqrt{1+\mathrm{tgx}}}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tgx}\cdot(1+\sqrt{1+\mathrm{tgx}})}{1-1-\mathrm{tgx}}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tgx}\cdot(1+\sqrt{1+\mathrm{tgx}})}{-\mathrm{tgx}}=-2$$

Задание 1.5 Используя второй замечательный предел, найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+5}{x^2-5}\right)^{x^2}$.

Ответ: e^{10} **Решение задания 1.5**

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5}{x^2-5}\right)^{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-5+10}{x^2-5}\right)^{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{10}{x^2-5}\right)^{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2-5}{10}}\right)^{\frac{x^2-5}{10}\cdot\frac{10}{x^2-5}\cdot x^2}=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2-5}{10}}\right)^{\frac{x^2-5}{10}}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{10x^2}{x^2-5}\right)}=e^{10}$$

Задание 1.6 Найти производную функции $y=x^3\cos 2x$.

Ответ: $y'=-2x^3\sin 2x+3x^2\cos 2x$ **Решение задания 1.6**

$$y'=3x^2\cos 2x+x^3(-\sin 2x)\cdot 2=3x^2\cos 2x-2x^3\sin 2x$$

Задание 1.7 Найти производную функции $y=\dfrac{arctgx}{x^3}$.

Ответ: $y'=\dfrac{x-3(1+x^2)\cdot arctgx}{x^4(1+x^2)}$ **Решение задания 1.7**

$$y' = \frac{\frac{1}{1+x^2}\cdot x^3 - 3x^2\cdot \operatorname{arctg} x}{(x^3)^2} = \frac{x^3 - 3x^2\cdot(1+x^2)\cdot \operatorname{arctg} x}{(1+x^2)\cdot x^6} = \frac{x - 3\cdot(1+x^2)\cdot \operatorname{arctg} x}{(1+x^2)\cdot x^4}$$

Задание 1.8 Найти производную третьего порядка: $y = x\ln x$.

Ответ: $-\frac{1}{x^2}$**. Решение задание 1.8**

$$y' = \ln x + x\cdot\frac{1}{x} = \ln x + 1$$

$$y'' = \frac{1}{x}$$

$$y''' = -\frac{1}{x^2}$$

Задание 1.9 Найти предел, используя правило Лопиталя: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}$.

Ответ: 0. Решение задания 1.9

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x} = 0$$

Задание 1.10 Найти предел, используя правило Лопиталя: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^x - x - 1}{\sin^2 3x}\right)$.

Ответ: $\frac{1}{18}$**. Решение задания 1.10**

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x - x - 1}{\sin^2 3x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{2\sin 3x\cdot\cos 3x\cdot 3} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{3\sin 6x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{3\sin 6x\cdot 6} = \frac{1}{18}$$

Задание 2.

Задание 2.1.Определить интервалы монотонности функции $y = xe^{3x}$.

Ответ: $x \in (-\infty;-1/3]$ y **убывает;** $x \in [-1/3;+\infty)$ y **возрастает.**

Решение задания 2.1

$y = xe^{3x}$ D(y)=(-∞; +∞)

$y' = e^{3x} + x \cdot e^{3x} \cdot 3 = e^{3x}(1+3x)$; $y' = 0$ при $x = -\frac{1}{3}$

$y' > 0$ $e^{3x}(1+3x) > 0$; $1+3x > 0$; $x > -\frac{1}{3}$

$y' < 0$ $e^{3x}(1+3x) < 0$;; $x < -\frac{1}{3}$

функция убывает при $x \in (-\infty;-1/3]$

функция возрастает при $x \in [-1/3;+\infty)$

Задание 2.2.Найти экстремумы функции $y = \frac{x^2}{x-2}$.

Ответ: $y_{\max}(0) = 0$, $y_{\min}(4) = 8$.

Решение задания 2.2

$D(y) = (-\infty;2) \cup (2;+\infty)$

$$y' = \frac{2x \cdot (x-2) - x^2}{(x-2)^2} = \frac{2x^2 - 4x - x^2}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2} = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$$

x=0 точка максимума

x=4 точка минимума

$y_{\max}(0) = 0$ $y_{\min}(4) = \frac{16}{4-2} = 8$

Задание 2.3.Найти интеграл: $\int \frac{\cos \ln x}{x} dx$.

Ответ: $\sin \ln x + C$

Решение задания 2.3

$$\int \frac{\cos \ln x}{x} dx = \int \cos \ln x d \ln x = \sin \ln x + C$$

Задание 2.4.Используя метод интегрирования по частям, найти интеграл $\int x \cos x dx$.

Ответ: $x \sin x + \cos x + C$

Решение задания 2.4

$$\int x \cos x dx = \begin{vmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \cos x dx & \\ v = \sin x & \end{vmatrix} = x \cdot \sin x - \int \sin x dx = x \cdot \sin x + \cos x + C$$

Задание 2.5. Вычислить определенный интеграл $\int_0^{\pi/4} \sin 4x dx$.

Ответ: $\frac{1}{2}$

Решение задания 2.5

$$\int_0^{\pi/4} \sin 4x dx = \frac{1}{4} \int_0^{\pi/4} \sin 4x d(4x) = \frac{1}{4} \cdot (-\cos 4x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{4} \cdot (\cos \pi - \cos 0) = -\frac{1}{4} \cdot (-1-1) = \frac{1}{2}$$

Задание 2.6.Используя замену переменной в определенном интеграле, вычислить: $\int_0^1 \sqrt{4 - x^2} dx$.

Ответ: $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$

Решение задания 2.6

Замена $x = 2\sin t$

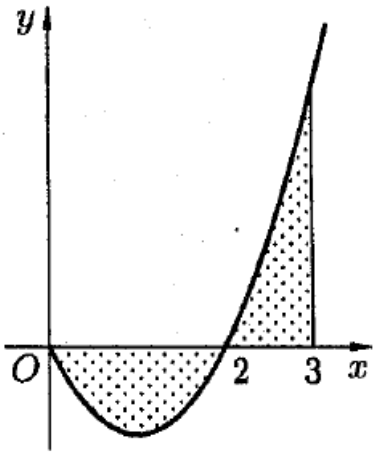
$$\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx = \left| \begin{array}{l} x = 2\sin t \\ dx = 2\cos t\,dt \\ x = 0 \quad t = 0 \\ x = 1 \quad t = \dfrac{\pi}{6} \end{array} \right| = \int_0^{\frac{1}{6}} \sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos t\,dt = \int_0^{\frac{1}{6}} 2\cos t \cdot 2\cos t\,dt =$$

$$= 4\int_0^{\frac{1}{6}} \frac{1+2\cos t}{2}\,dt = 2\int_0^{\frac{1}{6}} dt + 2\int_0^{\frac{1}{6}} \cos 2t\,dt = 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} + \sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = 2\cdot\frac{\pi}{6} - 0 + \sin\frac{\pi}{3} - \sin 0 = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Задание 2.7. Найти площадь фигуры, ограниченной осью Ох и графиком функции $y=x^2-2x$ при $x \in [0;3]$.

Ответ: $2\frac{2}{3}$.

Решение хадания 2.7



$$S = -\int_0^2 (x^2-2x)\,dx + \int_2^3 (x^2-2x)\,dx = -\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 + 2\frac{x^2}{2}\Big|_0^2 + \frac{x^3}{3}\Big|_2^3 - 2\frac{x^2}{2}\Big|_2^3 =$$

$$= -\frac{1}{3}(8-0) + (4-0) + \frac{1}{3}(27-8) - (9-4) = -\frac{8}{3} + 4 + \frac{19}{3} - 5 = \frac{11}{3} - 1 = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$$

Задание 2.8. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z = x^2 + 3x\sqrt{y} - y + \frac{y^2}{x}$.

Ответ: $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 3\sqrt{y} - \frac{y^2}{x^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = 3x\frac{1}{2\sqrt{y}} - 1 + \frac{2y}{x}$.

Решение задания 2.8

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 3\sqrt{y} - \frac{y^2}{x^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3x\frac{1}{2\sqrt{y}} - 1 + \frac{2y}{x}$$

Задание 2.9.Найти $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$ для функции $u = \sin\left(\frac{xy}{z}\right)$.

Ответ: $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = -\left(\frac{y}{z}\right)^3 \cos\left(\frac{xy}{z}\right)$

Решение задания 2.9

$$u = \sin\left(\frac{xy}{z}\right)$$

$$\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dx}} = \frac{\mathrm{y}}{\mathrm{z}}\cos\left(\frac{\mathrm{xy}}{\mathrm{z}}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{u}}{\mathrm{dx}^2} = -\left(\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{z}}\right)^2 \sin\left(\frac{\mathrm{xy}}{\mathrm{z}}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}^3\mathrm{u}}{\mathrm{dx}^3} = -\left(\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{z}}\right)^3 \cos\left(\frac{\mathrm{xy}}{\mathrm{z}}\right)$$

Задание 2.10.Решить дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными $\left(1+\mathrm{x}^2\right)\mathrm{dy} - 2\mathrm{xy}\,\mathrm{dx} = 0$.

Ответ: $y = C\left(1 + x^2\right)$, $C \in R$.

Решение задания 2.10

$$\left(1+\mathrm{x}^2\right)\mathrm{dy} - 2\mathrm{xy}\,\mathrm{dx} = 0$$

$$\left(1+\mathrm{x}^2\right)\mathrm{dy} = 2\mathrm{xy}\,\mathrm{dx}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{2xdx}{1+x^2}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1}$$

$$\ln|y| = \ln(1+x^2) \cdot |C|$$

Задание 3.

Задание 3.1.Решить дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$\mathrm{xy}\cdot \mathrm{y}' = 1-\mathrm{x}^2.$

Ответ: $x^2 + y^2 = \ln x^2 + C$

Решение задания 3.1

$\mathrm{xy}\cdot \mathrm{y}' = 1-\mathrm{x}^2$

$\mathrm{y}\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \frac{1-\mathrm{x}^2}{\mathrm{x}}$

$\mathrm{ydy} = \left(\frac{1}{\mathrm{x}} - \mathrm{x}\right)\mathrm{dx}$

$\frac{\mathrm{y}^2}{2} = \ln|\mathrm{x}| - \frac{\mathrm{x}^2}{2} + \frac{\mathrm{C}}{2}$

$\mathrm{y}^2 = \ln \mathrm{x}^2 - \mathrm{x}^2 + \mathrm{C}$

Задание 3.2.Найти общее решение дифференциального уравнения $y''' - 2y'' - 3y' = 0$.

Ответ: $y = C_1 + C_2 e^{3x} + C_3 e^{-x}$

Решение задания 3.2

$y''' - 2y'' - 3y' = 0$

$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 3\lambda = 0$

$\lambda(\lambda^2 - 2\lambda - 3) = 0$

$\lambda(\lambda + 1)(\lambda - 3) = 0$

$\lambda_1 = 0$

$\lambda_2 = 3$

$\lambda_3 = -1$

Задание 3.3.Вычислить интеграл $\int_0^2 dy \int_0^1 (x^2 + 2y)dx$.

Ответ: $4\frac{2}{3}$

Решение задания 3.3

$$\int_0^2 dy \int_0^1 (x^2 + 2y)dx = \int_0^2 \left(\frac{x^3}{3} + 2xy \right) \Big|_0^1 dy = \int_0^2 \left(\frac{1}{3} + 2y \right) dy = \left(\frac{1}{3}y + 2\frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^2 = \frac{1}{3} \cdot 2 + 4 = 4\frac{2}{3}$$

Задание 3.4.Применяя признак Даламбера, исследовать на сходимость ряд $\sum_1^\infty \frac{4^n}{n!}$.

Ответ: ряд сходится.
Решение задания 3.4

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{4^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot 4^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n+1} = 0 \ < \ 1 - \text{ряд сходится}$$

Задание 3.5. Применяя признак Коши, исследовать на сходимость ряд $\sum_2^\infty \frac{1}{(\ln n)^n}$.

Ответ: ряд сходится

Решение задания 3.5

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0 \ < \ 1 - \text{ряд сходится}$$

Задание 3.6.Используя признак Коши, исследовать сходимость ряда:

$$3 + \frac{3^2}{2^2} + \frac{3^3}{3^3} + \frac{3^4}{4^4} + \Lambda + \frac{3^n}{n^n} + K$$

Ответ: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} = 0 < 1$ **ряд сходится.**

Решение задания 3.6

$$3+\frac{3^2}{2^2}+\frac{3^3}{3^3}+\frac{3^4}{4^4}+\Lambda\ +\frac{3^n}{n^n}+K=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}=0\ <\ 1$$ – ряд сходится

Задание 3.7. Представить комплекное число $z=-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ в тригонометрической и показательной формах.

Ответ: $z=2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$, $z=2e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

Решение задания 3.7

$$z=-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$$

$$z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

$$\varphi=\frac{3\pi}{4}$$

$$|z|=\rho=\sqrt{2+2}=2$$

Задание 3.8. Представить комплекное число $z=-1-i\sqrt{3}$ в тригонометрической и показательной формах.

Ответ: $z=2\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$, $z=2e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.

Решение задания 3.8

$$z=-1-i\sqrt{3}$$

$$z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

$$\varphi=-\frac{2\pi}{3}$$

$$|z|=\rho=\sqrt{1+3}=2$$

Задание 3.9. Используя формулу Муавра, вычислить $\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{60}$.

Ответ: 2^{60}.

Решение задания 3.9

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

$$z = -1 + i\sqrt{3}$$

$$\varphi = \frac{2\pi}{3}$$

$$|z| = \rho = \sqrt{1+3} = 2$$

$$z = -1 + i\sqrt{3} = 2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$$

$$z^{60} = (-1 + i\sqrt{3})^{60} = 2^{60}(\cos(\frac{2\pi}{3}\cdot 60) + i\sin(\frac{2\pi}{3}\cdot 60)) =$$
$$= 2^{60}(\cos(40\pi) + i\sin(40\pi)) = 2^{60}(1 + i\cdot 0) = 2^{60}$$

Задание 3.10. Пользуясь условиями Коши-Римана, определить, является ли функция $w = e^z$ дифференцируемой хотя бы в одной точке комплексной плоскости.

Ответ: функция $w = e^z$ является дифференцируемой на всей комплексной плоскости.

Решение задания 3.10

Пусть $z = x + iy$, $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Если в некоторой точке функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ дифференцируемы как функции действительных переменных x и y, кроме того удовлетворяют условиям Коши-Римана $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$, то функция $f(z) = u + iv$ является дифференцируемой в точке $z = x + iy$ как функция комплексного переменного z.

Так как $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$,то $u(x,y) = e^x\cos y$, $v(x,y) = e^x\sin y$. Функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ как функции действительных переменных x и y дифференцируемы в любой точке (они имеют непрерывные частные производные любого порядка) и удовлетворяют условиям Коши-Римана.

Задание 4.

Задание 4.1. Понятие матрицы. Произведение матриц . Привести пример.

Ответ: *Матрицей* называется прямоугольная таблица, образованная из элементов некоторого множества и содержащая m строк и n столбцов:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ или } \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}.$$

Числа m и n называются *порядком* матрицы. Если $m \neq n$, то матрица называется *прямоугольной матрицей* размера $m \times n$, а если $m = n$, то – *квадратной матрицей* порядка n. Элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ образуют *главную диагональ* квадратной матрицы A порядка n, а элементы $a_{1n}, a_{2,n-1}, \dots, a_{n1}$ – *побочную диагональ* этой матрицы.

Для краткого обозначения матрицы используются символы $A = (a_{ij})$ или $A = \|a_{ij}\|$ ($i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, n}$). Первый и второй индексы у элементов a_{ij} указывают соответственно номер строки и номер столбца, в которых располагается этот элемент.

Матрицу, полученную из данной матрицы A заменой в ней строк соответствующими столбцами, называют *транспонированной* к A и обозначают символом A^T.

Квадратная матрица, все диагональные элементы которой равны 1, а остальные – нулю, называется *единичной* и обозначается буквой E

Произведением $A \cdot B$ $m \times n$-матрицы $A = \|a_{ij}\|$ на $n \times s$-матрицу $B = \|b_{ij}\|$ называется $m \times s$-матрица $C = \|c_{ij}\|$, элемент c_{ij} которой по правилу умножения «строки на столбец» равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+9 & 2+3 & 1+0 \\ 1+6 & 2+2 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 1 \\ 7 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Задание 4.2. Обратная матрица, условие её существования. Вычисление обратной матрицы. Найти матрицу, обратную к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ:Пусть A – квадратная матрица n-го порядка, а E – единичная матрица того же порядка.

Матрица A^{-1} называется *обратной* по отношению к матрице A, если

$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

Если определитель матрицы равен нулю, то такую матрицу принято называть *вырожденной*, в противном случае – *невырожденной*.

Пусть матрица A является невырожденной, то есть $|A| \neq 0$. Рассмотрим матрицу, составленную из алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы A:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \text{K} & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \text{K} & A_{2n} \\ \text{K} & \text{K} & \text{K} & \text{K} \\ A_{n1} & A_{n2} & \text{K} & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

При транспонировании ее получается матрица A^*, называемая *присоединенной* к матрице A:

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \text{K} & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \text{K} & A_{n2} \\ \text{K} & \text{K} & \text{K} & \text{K} \\ A_{1n} & A_{2n} & \text{K} & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Для того чтобы для матрицы A существовала обратная матрица A^{-1}, необходимо и достаточно, чтобы матрица A была невырожденной и при этом

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} A^*, \quad \text{где } \Delta = \det A.$$

Найдем матрицу, обратную к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислим определитель матрицы A:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

$\Delta = -1 \neq 0$, то есть матрица A является невырожденной, следовательно, существует обратная к ней матрица A^{-1}.

Найдем для каждого элемента матрицы A его алгебраическое дополнение и составим присоединенную матрицу

$$A^* = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ 1 & -6 & -4 \end{pmatrix}.$$

По формуле $A^{-1} = \frac{1}{\Delta} A^*$ найдем обратную матрицу

$$A^{-1}=(-1)\cdot\begin{pmatrix}-1 & 4 & 3\\ -1 & 5 & 3\\ 1 & -6 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -4 & -3\\ 1 & -5 & -3\\ -1 & 6 & 4\end{pmatrix}.$$

Задание 4.3.Системы линейных уравнений. Отыскание решений линейной системы методом Крамера. Решить по правилу Крамера систему линейных уравнений:

$$\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=4,\\ 3x_1-5x_2+3x_3=1,\\ 2x_1+7x_2-x_3=8.\end{cases}$$

Ответ: Система уравнений вида

$$\left.\begin{array}{l}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m\end{array}\right\} \qquad (*)$$

называется *системой* m *линейных уравнений с* n *неизвестными*. Здесь через $x_1, x_2,\ldots, x_n$ обозначены неизвестные, подлежащие определению (число неизвестных n не предполагается обязательно равным числу уравнений m). Числа $a_{11}, a_{12},\ldots, a_{mn}$ называются *коэффициентами системы*. Первый индекс $i\ (i=1, 2,\text{K}\ , m)$ коэффициента системы a_{ij} указывает номер уравнения, в котором фигурирует данный коэффициент, а второй индекс $j\ (j=1, 2,\text{K}\ , n)$ – номер неизвестного, при котором этот коэффициент поставлен. Числа $b_1, b_2,\ldots, b_m$ называются *свободными членами системы*.

Система (*)называется *однородной*, если все её свободные члены $b_1, b_2,\ldots, b_m$ равны нулю, и *неоднородной* – если хотя бы один из свободных членов $b_1, b_2,\ldots, b_m$ отличен от нуля.

Решением системы (*) называется такая совокупность n чисел $c_1, c_2,\ldots, c_n$, которая при подстановке в систему (*) на место неизвестных $x_1, x_2,\ldots, x_n$ обращает все уравнения этой системы в тождества.

Система, имеющая хотя бы одно решение, называется *совместной*; система, не имеющая ни одного решения – *несовместной.* Система, имеющая единственное решение, называется *определённой*; система, имеющая более одного решения – *неопределённой*.

$$\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=4,\\ 3x_1-5x_2+3x_3=1,\\ 2x_1+7x_2-x_3=8.\end{cases}$$

Решение задания 4.3. Вычислим определитель основной матрицы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 33 \neq 0.$$

Так как он не равен нулю, то данная система имеет единственное решение, которое определяется по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Найдем

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 8 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 33, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 8 & -1 \end{vmatrix} = 33, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -5 & 1 \\ 2 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 33.$$

$$x_1 = \frac{33}{33} = 1, \quad x_2 = \frac{33}{33} = 1, \quad x_3 = \frac{33}{33} = 1.$$

Ответ: $(1;\ 1;\ 1)$.

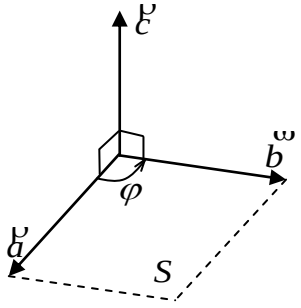
Задание 4.4. Векторное произведение двух векторов и его свойства. С помощью векторного произведения найти площадь треугольника ABC, если $A(-1; 2; 4)$, $B(3; 7; -2)$, $C(5; -9; 0)$.

Ответ: *Векторным произведением* вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, обозначаемый символом $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$ или $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ и удовлетворяющий следующим трем требованиям:

1) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi, \quad \varphi = (\hat{\vec{a}, \vec{b}})$;

2) $\vec{c} \perp \vec{a}, \quad \vec{c} \perp \vec{b}$;

3) $\vec{c}$ направлен так, что тройка $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ является правой (рис. 3).



Векторное произведение $[\vec{a}, \vec{b}]$ обладает следующими свойствами:

1) $[\vec{a}, \vec{b}] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \parallel \vec{b}$;

2) $\left|[\vec{a}, \vec{b}]\right| = S$ – площади параллелограмма, построенного на приведенных к общему началу векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

3) $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$ – векторное произведение антикоммутативно;

4) $[\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}, \vec{c}] = \alpha[\vec{a}, \vec{c}] + \beta[\vec{b}, \vec{c}]$ – векторное произведение линейно.

Площадь S треугольника ABC равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, то есть $S=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|$. Так как $\overrightarrow{AB}=\{4;5;-6\}$, $\overrightarrow{AC}=\{6;-11;-4\}$, то имеем

$$\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & 5 & -6\\ 6 & -11 & -4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5 & -6\\ -11 & -4\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}4 & -6\\ 6 & -4\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}4 & 5\\ 6 & -11\end{vmatrix}\vec{k}=$$

$$-86\vec{i}-20\vec{j}-74\vec{k}.$$

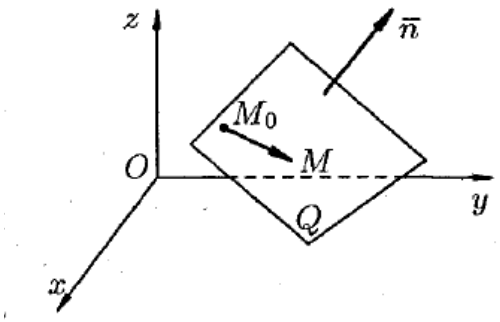
$$S=\frac{1}{2}\sqrt{(-86)^2+(-20)^2+(-74)^2}=\sqrt{3318}.$$

Задание 4.5.Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору (вывод). Общее уравнение плоскости. Частные случаи общего уравнения плоскости.

Ответ:

Пусть в пространстве Oxyz плоскость Q задана точкой $M_0(x_0; y_0;z_0)$ и вектором $\bar{n}=(A;B;C)$, перпендикулярным этой плоскости. Выведем уравнение плоскости Q. Возьмем на ней произвольную точку M(x; y;z) и составим вектор $\overline{M_0M}(x-x_0;y-y_0;z-z_0)$. При любом расположении точки M на плоскости Q векторы n и $\overline{M_0M}$ взаимно перпендикулярны, поэтому их скалярное произведение равно 0, т.е.

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \qquad (1).$$



Координаты любой точки плоскости Q удовлетворяют (1), координаты точек, не лежащих на плоскости Q, этому уравнению не удовлетворяют (для них $\bar{n}\cdot\overline{M_0M}\neq 0$).

Уравнение (1) называется *уравнением плоскости, проходящей через данную точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ перпендикулярно вектору* $\bar{n}=(A;B;C)$. Оно первой степени относительно текущих координат x, y, z. Вектор $\bar{n}=(A;B;C)$ называется *нормальным вектором плоскости*.

Придавая коэффициентам A, B и C уравнения (1) различные значения, можно получить уравнение любой плоскости, проходящей через точку M_0. Совокупность плоскостей, проходящих через данную точку, называется *связкой плоскостей*, а уравнение (1) – уравнением связки плоскостей.

Рассмотрим общее уравнение первой степени с тремя переменными x, y и z:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Полагая, что по крайней мере один из коэффициентов *A, B* или *C* не равен нулю, например B≠0, перепишем уравнение (2) в виде

Сравнивая уравнение (3) с уравнением (1), видим, что уравнения (2) и (3) являются уравнением плоскости с нормальным вектором $\bar{n} = (A; B; C)$, проходящей через точку .

Итак, уравнение (2) определяет в системе координат *Oxyz* некоторую плоскость. Уравнение (2) называется *общим уравнением плоскости*.

Частные случаи общего уравнения плоскости:

1. *Если D = 0*, то оно принимает вид *Ax + By + Cz = 0*. Этому уравнению удовлетворяет точка O(0;0;0). Следовательно, в этом случае *плоскость проходит через начало координат*.

2. *Если C = 0*, то имеем уравнение *Ax + By + D = 0*. Нормальный вектор $\bar{n} = (A; B; 0)$ перпендикулярен оси *Oz*. Следовательно, *плоскость параллельна оси Oz*; если *B = 0* – параллельна оси *Oy*, A = 0 – параллельна оси *Ox*.

3. *Если C = D = 0*, то плоскость проходит через O(0;0;0) параллельно оси *Oz*, т.е. плоскость *Ax + By=0 проходит через ось Oz*. Аналогично, уравнениям *By + Cz = 0* и *Ax + Cz = 0* отвечают плоскости, проходящие соответственно через оси *Ox* и *Oy*.

4. *Если A = B = 0*, то уравнение (2) принимает вид *Cz + D = 0*, т.е. $z = -\frac{D}{C}$.
   Плоскость *параллельна плоскости Oxy*. Аналогично, уравнениям *Ax + D = 0* и *By + D = 0* отвечают плоскости, соответственно параллельные плоскостям *Oyz* и *Oxz*.

5. *Если A = B = D = 0*, то уравнение (2) примет вид *Cz = 0*, т.е. *z = 0*. Это *уравнение плоскости Oxy*. Аналогично: *y = 0* – уравнение плоскости *Oxz*; *x=0* – уравнение плоскости *Oyz*.

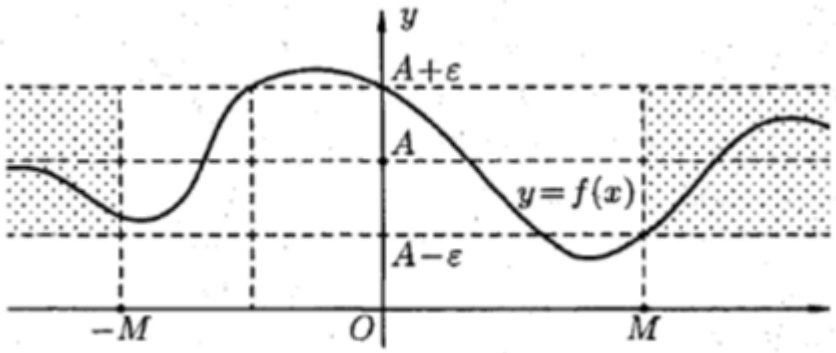
Задание 4.6. Предел функции при $x \to \infty$. Найти $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2 - x}{x^2 + 10}$.

Ответ:

Пусть функция y=f(x) определена в промежутке $(-\infty; \infty)$. Число A называется *пределом функции f(x) при* $x \to \infty$, если для любого положительного числа ε существует такое число M = M(ε) >0, что при всех x, удовлетворяющих неравенству |x| > M выполняется неравенство |f(x) - A|< ε. Коротко это определение можно записать так:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists M > 0\ \forall x:\ |x| > M \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = A$$

Если $x \to +\infty$, то пишут $A = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ если $x \to -\infty$, то – $A = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ Геометрический смысл этого определения таков: для $\forall \varepsilon > 0 \; \exists M > 0$, что при $x \in (-\infty; -M)$ или $x \in (M; +\infty)$ соответствующие значения функции f(x) попадают в ε - окрестность точки A, т.е. точки графика лежат в полосе шириной 2ε , ограниченной прямыми y = A + ε и y = A - ε.



$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - x}{x^2 + 10} = \lim_{x\to\infty} \frac{2 - \frac{2}{x^2}}{1 + \frac{10}{x^2}} = 2$$

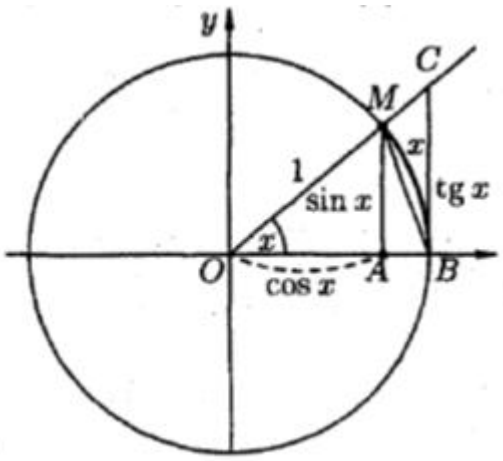
Задание 4.7. Первый замечательный предел (с выводом). Второй замечательный предел. Используя первый замечательный предел, найти $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{2x}$ **.**

Ответ:

При вычислении пределов выражений, содержащих тригонометрические функции, часто используют предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \qquad (1)$$

называемый *первым замечательным пределом*. Читается: предел отношения синуса к его аргументу равен единице, когда аргумент стремится к нулю. Докажем равенство (1).



Возьмем круг радиуса 1, обозначим радианную меру угла *MOB* черех *x*. Пусть $0 < x < \frac{\pi}{2}$. На рисунке *AM* =*sin x*, дуга *MB* численно равна центральному углу *x*, BC = tg x. Очевидно, имеем $S_{\Delta MOB} < S_{\text{сектора MOB}} < S_{\Delta COB}$. На основании соответствующих формул геометрии получаем $\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}tgx$. Разделим неравенства на $\frac{1}{2}\sin x > 0$, получим $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$ или $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$. Так как $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$ и $\lim\limits_{x\to 0} 1 = 1,$ то по признаку (о пределе промежуточной функции) существования пределов

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ (x>0)}} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (2)$$

Пусть теперь x<0. Имеем $\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin(-x)}{-x}$ где $-x > 0.$ Поэтому

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ (x<0)}} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (3)$$

Из равенства (2) и (3) вытекает равенство (1).

Как известно, предел числовой последовательности , $n \in N$ имеет предел, равный *e:*

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (1)$$

Решение примера. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{2x} = \frac{3}{2}\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x} = \frac{3}{2}\cdot 1 = \frac{3}{2}$.

Задание 4.8.Дифференцирование функций, заданных параметрически.

Пример. Найти y'_x, если $\begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 \end{cases}$

Ответ:

Пусть зависимость между аргументом *x* и функцией *y* задана параметрически в виде двух уравнений

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad (2)$$

где t – вспомогательная переменная, называемая параметром.

Найдем производную y'_x

считая, что функции (2) имеют производные и что функция *x=x(t)* имеет обратную *t = φ(x)*. По правилу дифференцирования обратнойм функции

$$t'_x = \frac{1}{x'_t} \qquad (3)$$

Функцию *y = f(x)*, определяемую параметрическими уравнениями (2), можно рассматривать как сложную функцию *y = y(t)*, где *t = φ(x)*.

По правилу дифференцирования сложной функции имеем:

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x$$

С учетом равенства (3) получаем $y'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t}$

т.е. $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$

Решение:

Если $\begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 \end{cases}$, то

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dt}{dt}} = \frac{\left(t^2\right)'_t}{\left(t^3\right)'_t} = \frac{2t}{3t} = \frac{2}{3t}$$

Задание 4.9. Путем последовательного интегрирования, решить дифференциальное уравнение $y'' = \frac{1}{1+x^2}$**.**

Ответ: $y = x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C_1 x + C_2$.

Решение. $y' = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + C_1$,

$$y = \int \left(\operatorname{arctg} x + C_1\right)dx = \int \operatorname{arctg} x\,dx + \int C_1\,dx.$$

где

$$\int \operatorname{arctg} x\,dx = \begin{vmatrix} u = \operatorname{arctg} x, & dv = dx \\ du = \dfrac{dx}{1+x^2}, & v = x \end{vmatrix} = x \cdot \operatorname{arctg} x - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2}\,dx =$$

$$= x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{d\left(1+x^2\right)}{1+x^2} = x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C_2.$$

Задание 4.10. Комплексные числа. Модуль и аргумент комплексного числа. Тригонометрическая и показательная форма записи комплексного числа.

Выражение $z = a + bi$ называется комплексным числом (алгебраической формой записи комплексного числа), a, b – действительные числа, $i = \sqrt{-1}$ мнимая единица

Число $\bar{z} = a - bi$ называется сопряженным к комплексному числу $z = a + bi$.

Действительное число $\sqrt{a^2 + b^2}$ называется модулемкомплексного числа z и обозначается: $|z|$.

Поставим в соответствие комплексному числу $z = a + bi$ точку $M(a, b)$ плоскости xOy. Тогда плоскость xOy будем называть комплексной плоскостью, ось Ox – действительной осью, ось Oy – мнимой осью. Рассмотрим вектор $\overrightarrow{OM}$. По теореме Пифагора $\left|\overrightarrow{OM}\right| = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$.

Обозначим $\rho = \left|\overrightarrow{OM}\right| = |z|$, $\varphi = \angle MOx$ (рис. 5.1.1).

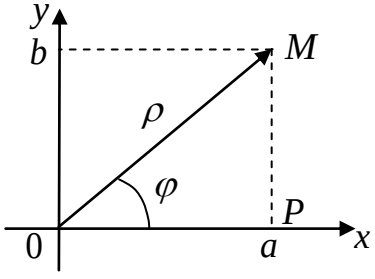


Рис. 5.1.1

Угол φ, который составляет в положительным направлением оси Ox, называется аргументом комплексного числа z и обозначается символом:

$\varphi = \arg z$.

Функция $\varphi = \arg z$ есть однозначная функция, так как $0 \le \varphi < 2\pi$ $(z \ne 0)$. Вводят также многозначную функцию $\varphi = Argz = \arg z + 2\pi k$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \text{K})$, которая дает все значения φ.

Из треугольника MOP: $a = \rho\cos\varphi = |z|\cos\varphi$, $b = \rho\sin\varphi = |z|\sin\varphi$. Тогда

$$z = a + bi = \rho\cos\varphi + \rho\sin\varphi = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Форма записи

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) \qquad (5.1.2)$$

называется тригонометрической формой записи комплексного числа.

Справедливо равенство

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \text{ где } \varphi \in R \qquad (5.1.3)$$

Для любого комплексного числа z имеем:

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho e^{i\varphi},$$

где выражение $z = \rho e^{i\varphi}$ называется показательной формой комплексного числа z. Для данного числа z оно единственно.

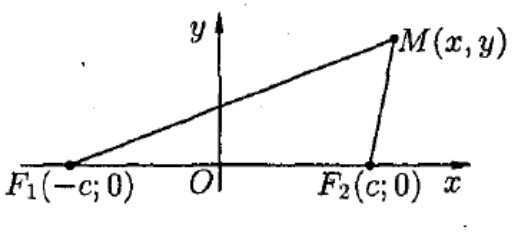
Задание 5.

Задание 5.1.Кривые второго порядка (написать канонические уравнения эллипса, гиперболы, параболы). Вывод канонического уравнения эллипса. Исследование формы эллипса по его уравнению.

Ответ:

Эллипсом называется множество всех точек плоскости, сумма расстояний которых до двух данных точек этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами. Обозначим фокусы через F_1 и F_2, расстояние между ними через 2c, а сумму расстояний от произвольной точки эллипса до фокусов – через 2a. По определению 2a>2c, то есть a>c.

Для вывода уравнения эллипса выберем систему координат Oxy так, чтобы фокусы F_1 и F_2 лежали на оси Ox, а начало координат совпало с серединой отрезка F_1F_2. Тогда фокусы будут иметь следующие координаты: $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$.



Пусть M(x;y) – произвольная точка эллипса. Тогда, согласно определению эллипса, $MF_1+MF_2=2a$, то есть

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a \quad (1)$$

Это, по сути, и есть управление эллипса.

Преобразуем уравнение (1) к более простому следующим образом:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2-4a*\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2$$

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx$$

$$a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2=a^4-2a^2cx+c^2x^2$$

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

Так как a>c, то $a^2-c^2>0$. Положим

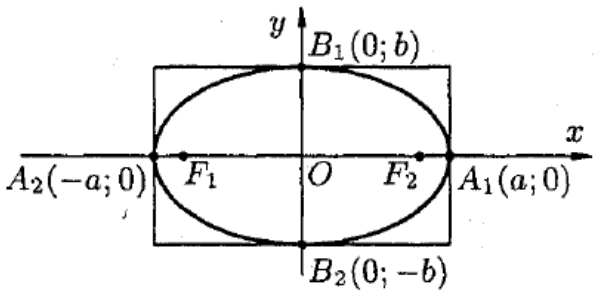
$$a^2-c^2=b^2 \quad (2)$$

Тогда последнее уравнение имеет вид $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ или

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (3)$$

Можно доказать, что уравнение (3) равносильно исходному уравнению. Уравнение (3) называется каноническим уравнением эллипса.

Эллипс – кривая второго порядка.



Установим форму эллипса, пользуясь его каноническим уравнением.

1. Уравнение (3) содержит x и y только в четных степенях, поэтому если точка (x;y) принадлежит эллипсу, то ему также принадлежат точки (x;-y), (-x;y),(-x,-y). Отсюда следует, что эллипс симметричен относительно осей Ox и Oy, а так же относительно точки O(0;0), которую называют центром эллипса.
2. Найдем точки пересечения эллипса с осями координат. Положив y=0, находим две точки $A_1(a;0)$ и $A_2(-a;0)$, в которых ось Ox пересекает эллипс. Положив в уравнении (3) x=0, находим точки пересечения эллипса с осью Oy: $B_1(0;b)$ и $B_2(0;-b)$. Точки A_1, A_2, B_1, B_2 называются вершинами эллипса. Отрезки A_1A_2 и B_1B_2, также длинны 2a и 2b называются соответственно большой и малой полуосями эллимпса.
3. Из уравнения (3) следует, что каждое слагаемое в левой части не превосходит единицы, т.е. имеют место неравенства $\frac{x^2}{a^2} \le 1$ и $\frac{y^2}{b^2} \le 1$ или $-a \le x \le a$ и $-b \le y \le b$. Следовательно, все точки эллипса лежат внутри прямоугольника, образованного прямыми $x = \pm a$, $y = \pm b$.
4. В уравнении (3) сумма неотрицательных слагаемых $\frac{x^2}{a^2}$ и $\frac{y^2}{b^2}$ равна единице.

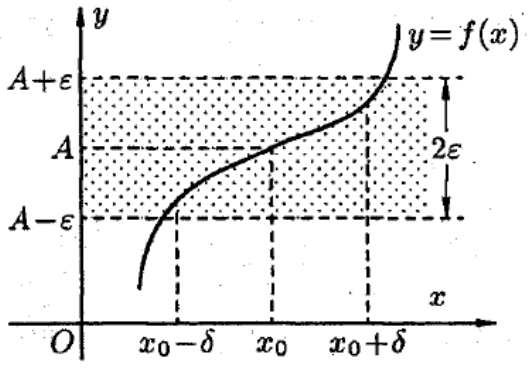
   Следовательно, при возрастании одного слагаемого другое будет уменьшаться, т.е. если |x| возрастает, то |y| уменьшается и наоборот.

Из сказанного следует, что эллипс имеет форму, изображенную на рисунке (овальная замкнутая кривая).

Задание 5.2.Предел функции в точке (по Гейне и по Коши).

Ответ:

Пусть функция y=f(x) определена в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0.



Сформулируем два, эквивалентных между собой, определения предела функции в точке.

Определение 1 (на «языке последовательностей», или по Гейне) Число A называется пределом функции y=f(x) в точке x_0 (или при $x \to x_0$), если для любой последовательности допустимых значений аргумента x_n, $n \in N$ ($x_n \neq x_0$), сходящейся к x_0 (т.е. $\lim x_n = x_0$), последовательность

соответствующих значений функции $f(x_n)$, $n \in N$ сходится к числу A (т.е. $\lim f(x_n)=A$).

В этом случае пишут $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)= A$ или $f(x)\to A$ при $x\to x_0$. Геометрический смысл предела функции:

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)= A$ означает, что для всех точек x, достаточно близких к точке x_0, соответствующие значения функции как угодно мало отличаются от числа A.

Определение 2 (на «языке ε-δ», или Коши). Число A называется пределом функции в точке x_0 (или при $x\to x_0$), если для любого положительного ε найдется такое положительное число δ, что для всех $x\neq x_0$, удовлетворяющих неравенству $|x-x_0|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Записывают $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)= A$. Это определение коротко можно записать так

$$\left(\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x : | x - x_0 | < \delta, x \neq x_0 \Rightarrow | f(x) - A | < \varepsilon\right) \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = A$$

Геометрический смысл предела функции: $A = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, если для любой ε-окрестности точки A найдется такая δ-окрестность точки x_0, что для всех $x\neq x_0$ из этой δ-окрестности соответствующие значения функции f(x) лежат в ε-окрестности точки A. Иными словами, точки графика функции y=f(x) лежат внутри полосы шириной 2ε, ограниченной прямыми y=A+ε, y=A-ε. Очевидно, что величина δ зависит от выбора ε, поэтому пишут δ=δ(ε).

Задание 5.3. Непрерывность функции в точке (дать два определения)**.**

Ответ:

Пусть функция y=f(x) определена в точке x_0 и в некоторой окрестности этой точки. Функция y=f(x) называется непрерывной в точке x_0, если существует предел функции в этой точке и он равен значению функции в этой точке, т.е.

$$\lim_{x\to x_0} f(x)= f(x_0). \quad (1)$$

Равенство (1) означает выполнение трех условий:

1. функция f(x) определена в точке x_0 и в ее окрестности;
2. функция f(x) имеет предел при $x\to x_0$;
3. предел функции в точке x_0 равен значению функции в этой точке, т.е. выполняется равенство (1).

Так как $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0.$, то равенство (1) можно записать в виде

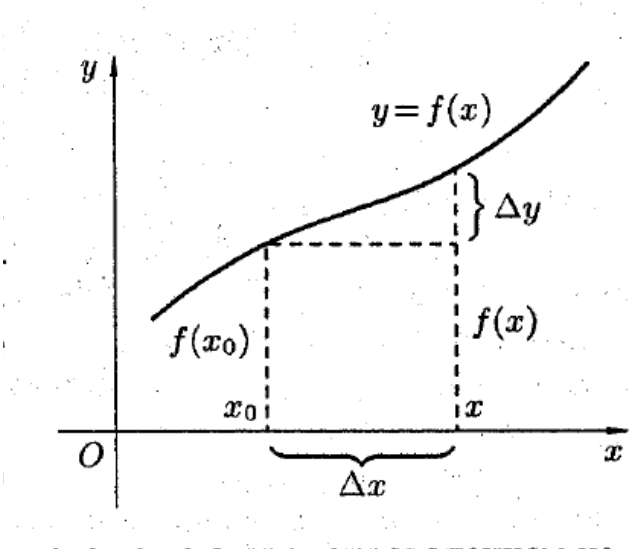
$$\lim_{x\to x_0} f(x)= f(\lim_{x\to x_0} x)= f(x_0). \quad (2)$$

Это означает, что при нахождении предела непрерывной функции f(x) можно перейти к пределу под знаком функции, то есть в функцию f(x) вместо аргумента x подставить его предельное значение x_0.

Можно дать еще одно определение непрерывной функции, опираясь на понятия приращения аргумента и функции.

Пусть функция y=f(x) определена в некотором интервале (a;b). Возьмем произвольную точку x_0€(a;b). Для любого x€(a;b) разность $x-x_0$ называют приращением аргумента x в точке x_0 и обозначается Δx: $\Delta x=x-x_0$. Отсюда $x=x_0+\Delta x$.

Разность соответствующих значений функции $f(x)-f(x_0)$ называется приращением функции f(x) в точке x_0 и обозначается Δy (или Δf или $\Delta f(x_0)$): $\Delta y=f(x)-f(x_0)$ или $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.



Очевидно, приращения Δx и Δy могут быть как положительными, так и отрицательными числами.

Запишем равенство (1) в новых обозначениях. Так как условия $x\to x_0$ и $x-x_0\to 0$ одинаковы, то равенство (1) принимает вид

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))=0 \text{ или } \lim_{\Delta x\to 0_0}\Delta y=0. \quad (3)$$

Полученное равенство (3) является еще одним определением непрерывности функции в точке: функция y=f(x) называется непрерывной в точке x_0, если она определена в точке x_0 и ее окрестности и выполняется равенство (3), т.е. бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

Исследуя непрерывность функции в точке, применяют либо первое (равенство (1)), либо второе (равенство (3)) определение.

Задание 5.4.Понятие производной, ее геометрический и механический смысл.

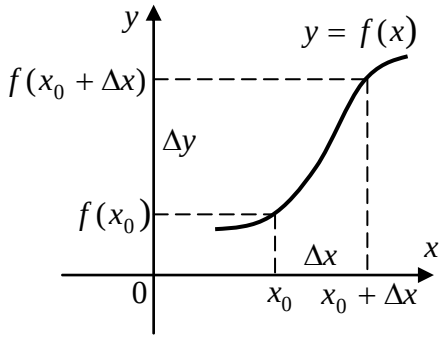
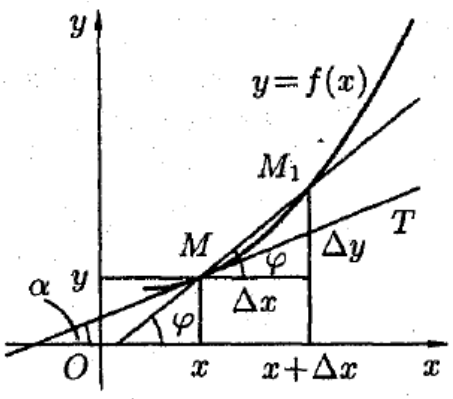


Рис. 1

Ответ: Пусть на некотором числовом промежутке X определена функция $y=f(x)$. Возьмем любую точку $x_0\in X$ и придадим аргументу x в точке x_0 произвольное приращение Δx такое, что $x_0+\Delta x\in X$.

При этом функция получит приращение $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ (рис. 1). Если существует предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, то он называется *производной* функции $y=f(x)$ в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$.



Рассмотрим теперь график непрерывной кривой y=f(x), имеющий в точке M(x;y) невертикальную касательную. Найдем ее угловой коэффициент k=tg α, где α – угол

касательной с осью ОХ.

Для этого проведем через точку М и точку M_1 графика с абсциссой x+Δx секущую. Обозначим через φ – угол между секущей равен

$$k_{сек} = tg = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

При Δx→0 в силу непрерывности функции приращение Δy тоже стремиться к нулю; поэтому точка M_1 неограниченно приближается по кривой к точке М, а секущая MM_1, поворачиваясь около точки М, переходит в касательную. Угол φ→α, т.е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varphi = \alpha$.

Следовательно, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} tg\varphi = tg\alpha$

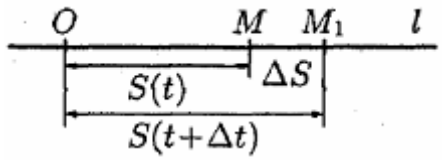
Поэтому угловой коэффициент касательной равен

$$k_{сек} = tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (2)$$

Таким образом, производная f`(x) в точке x равна угловому коэффициенту касательной к графику функции y=f(x) в точке, абсцисса которой равна x. В этом заключается смысл производной.

Пусть материальная точка (некоторое тело) М движется неравномерно по некоторой прямой. Каждому значению времени t соответствует определенное расстояние ОМ = S до некоторой фиксированной точки О. Это расстояние зависит от истекшего времени t, т.е. S=S(t).

Это равенство называют законом движения точки. Требуется найти скорость движения точки.



Если в некоторый момент времени t точка занимает положение М, то в момент времени t+Δt (Δt – приращение времени) точка займет положение M_1, где OM_1=S+ΔS (ΔS – приращение расстояния). Таким образом, перемещение точки М за время Δt будет ΔS=S(t+Δt)-S(t).

Отношение $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ выражает среднюю скорость движения точки за время Δt:

$$V_{ср.} = \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

Средняя скорость зависит от значения Δt: чем меньше Δt, тем точнее средняя скорость выражает скорость движения точки в данный момент времени t.

Предел средней скорости движения при стремлении к нулю промежутка времени Δt называется скоростью движения точки в данный момент времени (или мгновенной скоростью). Обозначим эту скорость через V, получим

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}, \text{ или } V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t} \quad (1)$$

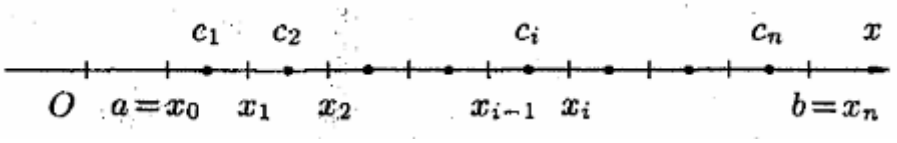
Это равенство перепишем в виде $V=S_t`$, т.е. скорость прямолинейного движения материальной точки в момент времени t есть производная от путь S по времени t. В этом заключается механический смысл производной.

Задание 5.5. Определенный интеграл как предел интегральной суммы. Геометрический смысл определенного интеграла.

Ответ:

Пусть функция y=f(x) определена на отрезке [a;b], a<b. Выполним следующие действия.

1. С помощью точек $x_0=a$, x_1, x_2,…, $x_n=b$ ($x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n$) разобьем отрезок [a,b] на n частичных отрезков $[x_0,x_1]$, $[x_1,x_2]$,…,$[x_{n-1},x_n]$.



2. В каждом частичном отрезке $[x_{i-1},x_i]$, i=1,2,…,n выберем произвольную точку $c_i \in [x_{i-1},x_i]$ и вычислим значение функции в ней, т.е. величину $f(c_i)$.

3. Умножим найденное значение функции $f(c_i)$ на длину $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ соответствующего частичного отрезка: $f(c_i)* \Delta x_i$.

4. Составим сумму S_n всех таких произведений:

$$S_n = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \ldots + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \quad (1)$$

Сумма вида (1) называется интегральной суммой функции y=f(x) на отрезке [a,b]. Обозначаем через λ длину наибольшего частичного отрезка: $\lambda=\max\Delta x_i (i=1,2,\ldots n)$.

5. Найдем предел интегральной суммы (1), когда $n\to\infty$ так, что $\lambda\to 0$.

Если при этом интегральная сумма S_n имеет предел I, который не зависит ни от способа разбиения отрезка [a,b] на частичные отрезки, ни от выбора точек в них, то число I называется определенным интегралом от функции y=f(x) на отрезке [a,b] и обозначается $\int_a^b f(x)dx$. Таким образом,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\lambda\to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \quad (2)$$

Числа a и b называются, соответственно, нижним и верхним пределами интегрирования, f(x) – подынтегральной функцией, f(x)dx – подынтегральным выражением, x – переменной интегрирования, отрезок [a;b] - областью (отрезком) интегрирования.

Функция y=f(x), для которой на отрезке [a;b] существует определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$, называется интегрируемой на этом отрезке.

Сформулируем теперь теорему о существовании определенного интеграла.

Теорема (Коши). Если функция y=f(x) непрерывна на отрезке [a;b], то определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ существует.

Пусть на отрезке [a;b] задана непрерывная функция y=f(x)≥0. Фигура, ограниченная сверху графиком функции y=f(x), снизу – осью Ox сбоку – прямыми x=a и x=b, называется криволинейной трапецией. Найдем площадь этой трапеции.

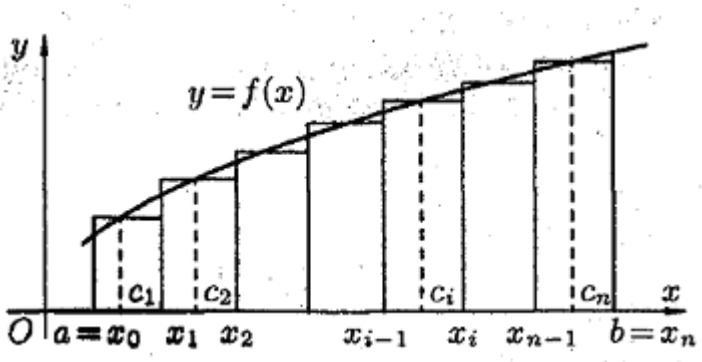
Для этого отрезок [a;b] точками $a=x_0$, $x_1,\ldots$, $b=x_n$ ($x_0<x_1<\ldots<x_n$) разобьем на n частичных отрезков $[x_0;x_1]$, $[x_1;x_2],\ldots,[x_{n-1},x_n]$. В каждом частичном отрезке $[x_{i-1},x_i]$ (i=1,2,…,n) возьмем произвольную точку c_i и вычислим значение функции в ней, т.е. $f(c_i)$.

Умножим значением функции $f(c_i)$ на длину $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ соответствующего частичного отрезка. Произведение $f(c_i)*\Delta x_i$ равно площади прямоугольника с основанием Δx_i и высотой $f(c_i)$. Сумма всех таких произведений

$$f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \ldots + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

равна площади ступенчатой фигуры и приближенно равна площади криволинейной трапеции:

$$S_n \approx \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$



С уменьшение всех величин Δx_i точность приближения криволинейной трапеции ступенчатой фигурой и точность полученной формулы увеличиваются. Поэтому за точное значение площади S криволинейной трапеции принимается предел S, к которому стремится площадь ступенчатой фигуры S_n, когда n неограниченно возрастает так, что

$\lambda=\max\Delta x_i\to 0$

$$S=\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\lambda\to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x \quad \text{, то есть } S=\int_a^b f(x)dx.$$

Итак, определенный интеграл от неотрицательной функции численно равен площади криволинейной трапеции.

В этом состоит геометрический смысл интеграла.

Задание 5.6. Длина дуги кривой в прямоугольных координатах (вывод формулы). Пример. Найти длину дуги кривой $y = \ln x$ **от** $x = \sqrt{3}$ **до** $x = \sqrt{8}$ **.**

Ответ:

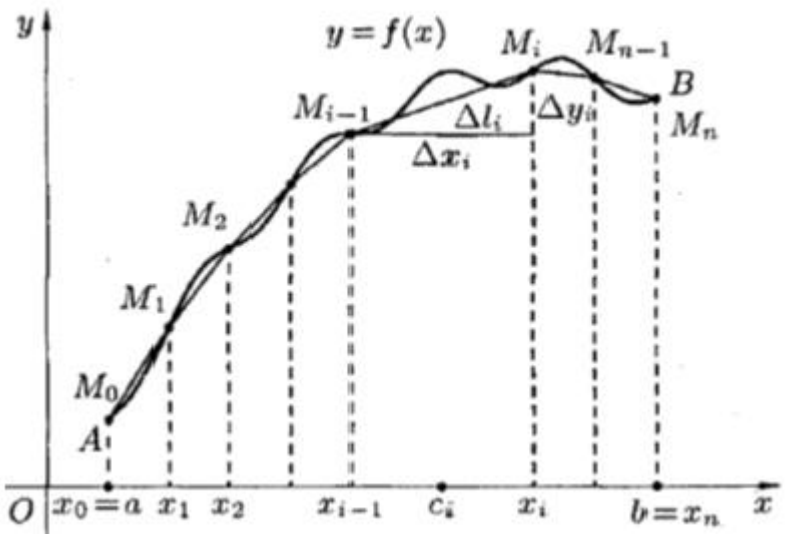
Пусть в прямоугольных координатах дана плоская кривая *AB* (или *L*), уравнение которой *y=f(x)*, где $a \le x \le b$.

Под длиной дуги AB понимается предел, к которому стремится длина ломаной линии, вписанной в эту дугу, когда число звеньев ломаной неограниченно возрастает, а длина наибольшего звена ее стремится к нулю.

Покажем, что если функция *y=f(x)* и ее производная *y'=f'(x)* непрерывны на отрезке [a;b], то кривая *AB* имеет длину, равную

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx, \qquad (1)$$

Применим схему I (метод сумм).



1. Точками $x_0 = a$, $x_1, \ldots, x_n = b$ ($x_0 < x_1 < \ldots < x_n$) разобьем отрезок [a;b] на *n* частей. Пусть этим точкам соответствуют точки $M_0 = A$, $M_1, \ldots, M_n = B$ на кривой *AB*. Проведем хорды M_0M_1, $M_1M_2, \ldots, M_{n-1}M_n$, длины которых обозначим соответственно через Δl_1, $\Delta l_2, \ldots, \Delta l_n$. Получим ломаную $M_0M_1M_2 \ldots M_{n-1}M_n$, длина которой равна

$$l_n = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \ldots + \Delta l_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i$$

2. Длину хорды (или звена ломаной) Δl_i можно найти по теореме Пифагора из треугольника с катетами Δx_i и Δy_i:

$$\Delta l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2},$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$

По теореме Лагранжа о конечном приращении функции $\Delta y_i = f'(c_i) \cdot \Delta x_i$, где

$c_i \in (x_{i-1}; x_i)$

Поэтому

$$\Delta l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (f'(c_1)\cdot \Delta x_i)^2} = \sqrt{1+(f'(c_i))^2}\cdot \Delta x_i,$$

а длина всей ломаной $M_0M_1\ldots M_n$ равна

$$l_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+(f'(c_i))^2}\cdot \Delta x_i \qquad (2)$$

3. Длина L кривой AB, по определению, равна

$$L = \lim_{\max \Delta l_i \to 0} l_n = \lim_{\max \Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i.$$

Заметим, что при $\Delta l_i \to 0$ также и $\Delta x_i \to 0$

$(\Delta l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$

и, следовательно, $|\Delta x_i| < \Delta l_i$). Функция $\sqrt{1+(f'(x))^2}$ непрерывна на отрезке [a;b], так как, по условию, непрерывна функция $f'(x)$. Следовательно, существует предел интегральной суммы (2), когда $\max \Delta x_i \to 0$:

$$L = \lim_{\substack{\max \Delta l_i \to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+(f'(c_i))^2}\cdot \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

Таким образом,

$$L = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx,$$

или в сокращенной записи

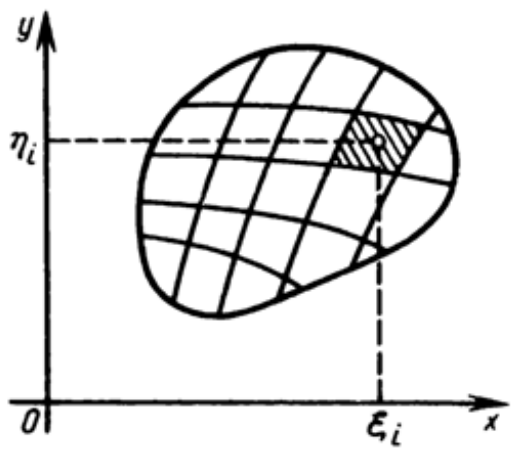
$$L = \int_a^b \sqrt{1+(y'_x)^2}\,dx,$$

Решение примера. Длина дуги кривой $y = \ln x$ от $x = \sqrt{3}$ до $x = \sqrt{8}$. **Ответ**: $1 + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$

Задание 5.6. Определение и условия существования двойного интеграла. Свойства двойного интеграла. Вычисление двойного интеграла .

Ответ:

Пусть D – некоторая ограниченная замкнутая область декартовой плоскости R^2, и $z = f(x, y)$ – произвольная функция, определенная и ограниченная в D.



Разобьем область D на n частей D_i, не имеющих общих внутренних точек, с площадями $\Delta S_i\ (i = 1, 2, \text{K}, n)$. Пусть $d(D_i)$ – наибольшее расстояние между граничными точками области D_i (диаметр), а $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n}\{d(D_i)\}$. Выбрав внутри каждой части D_i произвольную точку (ξ_i, η_i), составим сумму

$$\sigma = \sum_{i=} f(\xi \quad n) \cdot \Delta S \qquad (1)$$

Рис. 2.1.1

которая называется интегральной суммой для функции $f(x, y)$ в области D.

Определение. Если интегральная сумма σ при $\lambda \to 0$ имеет конечный предел I, то он называется двойным интегралом от функции $f(x, y)$ по области D и обозначается одним из символов:

$$I = \iint\limits_D f(x, y)ds = \iint\limits_D f(x, y)dxdy. \qquad (2)$$

В этом случае функция $f(x, y)$ называется интегрируемой в области D, D – областью интегрирования, x и y – переменными интегрирования, ds или $dxdy$ – элементами площади.

Необходимым условием интегрирования функций $f(x, y)$ на D является их ограниченность в областях интегрирования.

Имеют место следующие**достаточные**условия интегрируемости функции $f(x, y)$.

Теорема. Для того чтобы функция $f(x, y)$ была интегрируема в замкнутой ограниченной области D, достаточно чтобы она была непрерывна в D.

Геометрический смысл двойного интеграла: двойной интеграл от непрерывной неотрицательной функции $z = f(x, y)$ равен объему криволинейного цилиндра P, который ограничен снизу областью D плоскости xOy, сверху – графиком функции $z = f(x, y)$, с боков – цилиндрической поверхностью, направляющей которой служит граница области D, а образующие параллельны оси Oz

Свойства двойного интеграла

Теорема. Имеют место следующие свойства двойного интеграла:

Пусть $f(x, y)$, $g(x, y)$ интегрируемы в D, k – произвольное число

1°. $\iint\limits_D kf(x, y)dxdy = k\iint\limits_D f(x, y)dxdy.$

2°. $\iint\limits_D (f \pm g)dxdy = \iint\limits_D f\,dxdy \pm \iint\limits_D g\,dxdy.$

3°. Если область $D = D_1 \cup D_2$, где D_1 и D_2 – ограниченные замкнутые области, не имеющие общих внутренних точек

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x, y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x, y)dxdy.$$

4°. (Теорема о среднем). Если функция $f(x, y)$ непрерывна в области D, то существует точка $(\xi_0, \eta_0) \in D$ такая, что

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = f(\xi_0, \eta_0) \cdot S,$$

где S – площадь области D.

Теорема. Пусть функция $z = f(x, y)$ определена и непрерывна в области

$$D = \{(x, y) \mid a \le x \le b,\ y_1(x) \le y \le y_2(x)\},$$

где $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – непрерывные функции, $y_1(x) \le y_2(x)$ для $a \le x \le b$. Тогда двойной интеграл вычисляется по формуле

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy .$$

Задание 5.7. Линейные уравнения первого порядка. Методы Лагранжа и Бернулли (вывод формулы одним из методов) .

Ответ: Уравнение вида $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ (1)

где $P(x)$ и $Q(x)$ – известные функции, называется *линейным дифференциальным уравнением* (первого порядка). Будем предполагать, что $P(x)$ и $Q(x)$, непрерывны на своей области определения.

Если в уравнении (1) функция $Q(x)$ тождественно равна нулю в области определения D данного уравнения, то (1) принимает вид

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0 \qquad (2)$$

и называется линейным *однородным* уравнением, соответствующим уравнению (1). Уравнение (1), в котором $Q(x) \not\equiv 0$ в области D, называется *неоднородным*.

Для нахождения общего решения линейного неоднородного уравнения (1) применим *метод Лагранжа* (другое название метода – *метод вариации произвольной постоянной*). Сформулируем алгоритм решения.

Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения (2) в области определения уравнения. Разделяя в (2) переменные

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx .$$

и интегрируя, получим общее решение однородного уравнения (2)

$$y = Ce^{-\int P(x)dx},$$

где $C = const$. Определяем общее решение неоднородного уравнения (1) в виде

$$y = C(x)e^{-\int P(x)dx},$$

считая $C(x)$ некоторой дифференцируемой функцией, подлежащей определению. Подставляя функцию $y = C(x)e^{-\int P(x)dx}$ и ее производную

$$y' = C'(x)e^{-\int P(x)dx} - C(x)\cdot P(x)e^{-\int P(x)dx}$$

в уравнение (1), найдем $C'(x)$:

$$C'(x) = Q(x)e^{\int P(x)dx}.$$

Интегрируя последнее равенство, получим

$$C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C,$$

где C – произвольная постоянная. Подставляя найденную функцию $C(x)$ в выражение

$$y = C(x)e^{-\int P(x)dx},$$

получим общее решение неоднородного линейного уравнения (1):

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right). \qquad (3)$$

Для решения линейного неоднородного уравнения (1) применяют также *метод Бернулли* (другое название метода - *метод подстановки*).

Решение уравнения (1) будем искать в виде произведения двух неизвестных функций от x:

$$y(x) = u(x)\cdot v(x).$$

Вычисляя производную

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}.$$

и подставляя в исходное неоднородное уравнение (1), получим

$$u\left(\frac{dv}{dx} + P(x)v\right) + v\cdot\frac{du}{dx} = Q(x).$$

Так как u и v выбираются произвольно (они связаны лишь равенством $y = u\cdot v$), то выберем v из условия

$$\frac{dv}{dx} + P(x)v = 0. \qquad (4)$$

Как уже было установлено, общим решением уравнения (4) является функция

$$v(x) = Ce^{-\int P(x)dx},$$

где C – произвольная постоянная. Нам достаточно иметь какое-либо отличное от нуля частное решение, например при $C = 1$:

$$v(x) = e^{-\int P(x)dx}. \qquad (5)$$

Таким образом, с учетом (4) и (5) уравнение

$$u\left(\frac{dv}{dx} + P(x)v\right) + v\cdot\frac{du}{dx} = Q(x)$$

запишется в виде

$$e^{-\int P(x)dx}\cdot\frac{du}{dx} = Q(x).$$

Отсюда

$$du = Q(x)e^{\int P(x)dx}dx$$

или

$$u(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C. \qquad (6)$$

Подставив (5) и (6) в функцию

$$y(x) = u(x)\cdot v(x),$$

окончательно получим:

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right).$$

То есть вновь получили формулу (3).

Задание 5.8. Понятие числового ряда. Необходимое условие сходимости рядов. Признаки сходимости положительных рядов: признаки сравнения, Даламбера, Коши. Используя признак Даламбера исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{3^n}$.

Ответ: Пусть $a_1, a_2, \text{K}, a_n, \text{K}$ –некоторая бесконечная последовательность чисел. Выражение

$$a_1 + a_2 + \text{K} + a_n + \text{K} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (1)$$

называется бесконечным числовым рядом, а сами числа $a_1, a_2, \text{K}, a_n, \text{K}$ – членами ряда.

Суммы

$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, S_3 = a_1 + a_2 + a_3$, …,

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \text{K} + a_n$, …

называются частичными суммами ряда.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называют сходящимся, если последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ сходится к какому-нибудь числу S, то есть $\lim S_n = S$ при $n \to \infty$. Число S называют суммой ряда(1).

Если же последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ расходится, то есть если $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$, или предел вовсе не существует, то ряд (1) называется расходящимся.

Рассмотрим необходимое условие сходимости рядов.

Теорема (Коши). Предел общего члена сходящегося ряда равен нулю. Иначе говоря, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Рассмотрим ряды, члены которых неотрицательны; для краткости такие ряды будем называть просто положительными.

Пусть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \text{K} + a_n + \text{K}$$

является положительным, то есть $a_n \geq 0 \quad (n = 1, 2, 3, \text{K})$.

Теорема (1-й признак сравнения). Пусть даны два ряда:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (A) и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (B)

такие, что $0 \leq a_n \leq b_n \quad (n = 1, 2, 3, \text{K})$. Тогда из сходимости ряда (B) следует сходимость ряда (A), а из расходимости (A) следует расходимость (B).

Теорема (2-й признак сравнения). Если существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = K \ (b_n \neq 0, \quad 0 < K < +\infty),$$

то из сходимости ряда (B), при $K < +\infty$, вытекает сходимость ряда (A), а из расходимости (B), при $K > 0$, вытекает расходимость (A). Таким образом, при конечном и отличном от нуля пределе K оба ряда сходятся или оба расходятся одновременно.

Теорема (Радикальный признак Коши). Если для ряда (А) существует предел (конечный или нет):

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = c,$$

то при $c<1$ ряд сходится, а при $c>1$ ряд расходится. В случае, когда предел $c=1$, признак Коши не дает возможности судить о поведении ряда.

Теорема (Признак Даламбера). Если для ряда (А) существует предел (конечный или нет):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d,$$

то при $d<1$ ряд сходится, а при $d>1$ ряд расходится. Рассмотренный признак, как и признак Коши, ничего не дает, если оказывается, что предел $d=1$.

Решение примера. Используя признак Даламбера исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{3^n}$. Ответ: ряд сходится

Задание 5.9. Необходимые и достаточные условия дифференцируемости функции комплексного переменного. Аналитические функции.

Ответ: Функция $w=f(z)$, определенная в окрестности точки z, называется дифференцируемой в точке z, если существует предел (конечный)

$$\lim_{\Delta z\to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$$

где $\Delta w = f(z+\Delta z) - f(z) = \Delta u + i\Delta v$ называется приращением функции w, соответствующим приращению $\Delta z \neq 0$ независимого переменного z, Δz произвольным образом стремится к нулю. Этот предел называется производной функции $w=f(z)$ в точке z и обозначается $f'(z)$.

Теорема. Необходимым и достаточным условием дифференцируемости функции $w=f(z)$ в точке z является представление приращения Δw в этой точке в виде

$$\Delta w = A\cdot\Delta z + \varepsilon(z,\Delta z)\cdot\Delta z \qquad (1)$$

где A – постоянная, не зависящая от Δz, и $\varepsilon(z,\Delta z)\to 0$ *при* $\Delta z\to 0$.

Дифференциалом функции $f(z)$ в точке z называется произведение $A\cdot\Delta z$, являющееся линейной по отношению к Δz и главной (при $A\neq 0$) частью приращения Δw в равенстве (1), и обозначается dw или $df(z)$, т.е.

$$dw = df(z) = A\cdot\Delta z.$$

Так как $A=f'(z)$ и $\Delta z = dz$ то

$$dw = f'(z)\cdot dz.$$

Пусть однозначная функция $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ определена в некоторой области D комплексной плоскости (z).

Теорема. Для того чтобы функция $f(z)$ была дифференцируема в точке $z\in D$ как функция комплексного переменного, необходимо и достаточно, чтобы функции $u(x,y)$ *и* $v(x,y)$ были дифференцируемы в той же точке (как функции двух действительных переменных) и выполнялись условия Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Однозначная функция $w=f(z)$, определенная в некоторой области D комплексной плоскости (z), называется аналитической в области D,если она дифференцируема в каждой точке $z\in D$. Иначе говоря, аналитическая функция $f(z)$ дифференцируема в точке z и некоторой ее окрестности.

Теорема. Для того чтобы функция

$$w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$$ была

аналитической в области $D\subset(z)$, необходимо и достаточно, чтобы в этой области функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ имели непрерывные частные производные $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$, удовлетворяющие условиям Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Теорема. Каждая функция $w=f(z)$, аналитическая в области $D\subset(z)$, имеет производные всех порядков в этой области, то есть бесконечно дифференцируема в D.

Задание 5.10.Преобразование Лапласа

Ответ:Функция $f(t)$ действительного переменного *t* называется функцией-оригиналом, если она удовлетворяет следующим трем условиям:

1^0. При $t<0$ функция $f(t)\equiv 0$.

2^0. При $t\geq 0$ функция $f(t)$ на любом конечном отрезке $[a,b]$ оси *t*непрерывна за исключением, быть может, конечного числа точек разрыва первого рода.

3^0. При $t\to\infty$ функция $f(t)$ имеет экспоненциальный порядок роста, то есть существуют такие положительные постоянные *M* и σ, что для всех $t>0$

$$|f(t)|\leq Me^{\sigma_0 t}. \qquad (1)$$

Точная нижняя грань σ_0 тех значений σ, для которых имеет место неравенство (1), называется показателем степени роста функции $f(t)$.

Преобразованием Лапласа заданной функции $f(t)$ действительного переменного *t* с ядром e^{-pt} называется преобразование, ставящее в соответствие функции $f(t)$ функцию $F(p)$ комплексного переменного $p=\sigma+i\omega$ с помощью интеграла

$$F(p)=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt. \qquad (2)$$

Теорема. Если $f(t)$ является функцией-оригиналом с показателем роста σ_0, то функция $F(p)$, определяемая преобразованием (2), существует при $\operatorname{Re} p > \sigma_0$ и является в этой полуплоскости аналитической функцией.

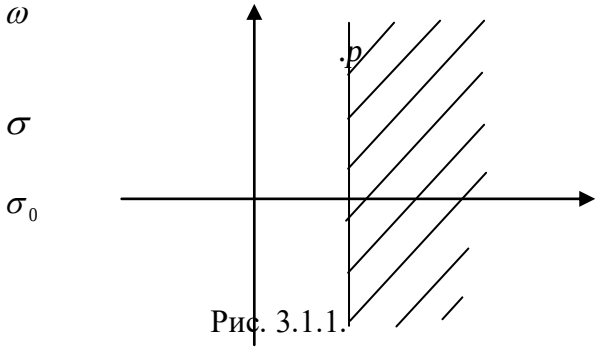


Рис. 3.1.1.

Определение. Функция $F(p)$, определенная через функцию $f(t)$ с помощью преобразования (2), называется изображением Лапласа функции $f(t)$; а функция $f(t)$ – оригиналом функции $F(p)$.

Связь функций $f(t)$ и $F(p)$ будет символически обозначаться следующим образом:

$f(t) \doteq F(p)$, или $F(p) \doteq f(t)$, или $F(p) = L(f(t); p)$.

Определение. Процесс нахождения изображения для заданного оригинала и обратно, нахождение оригинала по известному изображению называется операционным исчислением.

Теорема (теорема единственности). Если две непрерывные функции $f(t)$ и $g(t)$ имеют одно и то же изображение $F(p)$, то они тождественно равны.